量子等質球面について(作用素環論の展開)

AUTHOR(S):

戸松, 玲治

数理解析研究所講究録 1459 巻 2005 年 47-50

量子等質球面について

戸松玲治 (Reiji Tomatsu)
東京大学大学院数理科学研究科
(Graduate School of Mathematical Sciences,
University of Tokyo)

1. 量子群 $SU_q(2)$ と量子等質球面 $\mathbb{T}\setminus SU_q(2)$

1.1. $SU_q(2)$ **の定義.** 次の関係式をみたす元 x,u,v,y で生成される C^*-環を $A=C(SU_q(2))$ と書き,「非可換空間」である量子群 $SU_q(2)$ 上の「連続関数環」と理解することにします [Wo1].

$$ux=qxu,\quad vx=qxv,\quad yu=quy,\quad yv=qvy,\quad uv=vu,$$
$$xy-q^{-1}uv=yx-quv=1,\quad x^*=y,\quad u^*=-q^{-1}v.$$

ここで変形パラメータ q は非零絶対値 1 以下の実数とします. 量子群の元のかけ算, 単位元, そして逆元をとる操作を関数環でとらえる時には, それぞれ余積 δ, 余単位 ε, そして対合射 κ と呼ばれ, $SU_q(2)$ の場合は次で定義されます.

$$\begin{pmatrix}\delta(x) & \delta(u)\\ \delta(v) & \delta(y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\otimes 1 & u\otimes 1\\ v\otimes 1 & y\otimes 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\otimes x & 1\otimes u\\ 1\otimes v & 1\otimes y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\varepsilon(x) & \varepsilon(u)\\ \varepsilon(v) & \varepsilon(y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}\kappa(x) & \kappa(u)\\ \kappa(v) & \kappa(y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y & -qu\\ -q^{-1}v & x\end{pmatrix}.$$

$\delta\colon A\longrightarrow A\otimes A$ や $\varepsilon\colon A\longrightarrow\mathbb{C}$ は $*$-準同型ですが, $\kappa\colon A\longrightarrow A$ は閉作用素で $\kappa(ab)=\kappa(b)\kappa(a)$ と $\kappa(\kappa(a)^*)^*=a$ を満たしています. また, Haar 測度にあたる Haar 状態 $h\colon C(SU_q(2))\longrightarrow\mathbb{C}$ が存在します. それは, $(\mathrm{id}\otimes h)(\delta(a))=(h\otimes\mathrm{id})(\delta(a))=h(a)1$ を満たします. この状態で $C(SU_q(2))$ を GNS 表現して得られる von Neumann 環を $L^\infty(SU_q(2))$ と書きます. 余積は正則な $*$-準同型として拡張されます. さて, z を一次元トーラス群 $\mathbb{T}\subset\mathbb{C}$ の標準的な座標関数としましょう. このとき, $C(SU_q(2))$ の関係式は $x=z$, $u=v=0$, $y=\bar{z}$ としても整合していますから, $*$-準同型 $\pi_{\mathbb{T}}\colon C(SU_q(2))\longrightarrow C(\mathbb{T})$ がとれます. これが全射であることは明らかです. さて $\mathbb{T}$ は群なので, $C(\mathbb{T})$ も余積, 余単位, 対合射を持っていますが, $\pi_{\mathbb{T}}$ はそれらを保っていることが重要です. このような状況から, $\mathbb{T}$ が $SU_q(2)$ の部分群であると理解するのが適当でしょう.

1.2. $\mathbb{T}\setminus SU_q(2)$ **の定義.** この時, 商空間 $\mathbb{T}\setminus SU_q(2)$ を定義できます. すなわち, $(\mathrm{ev}_z\circ\pi_{\mathbb{T}}\otimes\mathrm{id})\circ\delta$ は $C(SU_q(2))$ への $z\in\mathbb{T}$ の作用となり, その固定点環を $C(\mathbb{T}\setminus SU_q(2))$ と書きます. $\mathbb{T}\setminus SU_q(2)$ をここでは, 量子等質球面と呼ぶことにします. また $L^\infty(SU_q(2))$ の中で弱閉包をとったものは $L^\infty(\mathbb{T}\setminus SU_q(2))$ と書きます. $C(\mathbb{T}\setminus SU_q(2))$ は Podleś が発見した量子球面系の一つです. 今, $C(\mathbb{T}\setminus SU_q(2))\subset C(SU_q(2))$ は部分環ですが, ここに余積 δ を作用しても大域的に不変になります, つまり, $\delta(C(\mathbb{T}\setminus SU_q(2)))\subset C(\mathbb{T}\setminus SU_q(2))\otimes C(SU_q(2))$ が成り立ちます. この状況は量子群 $SU_q(2)$ が量子等質球面 $\mathbb{T}\setminus SU_q(2)$ に右移動作用を起こしているとみることができます. この作用を $\alpha\colon C(\mathbb{T}\setminus SU_q(2))\longrightarrow C(\mathbb{T}\setminus SU_q(2))\otimes C(SU_q(2))$ と書くこ

とにします．von Neumann 環の話にした方が調べやすいので改めて α: $L^\infty(\mathbb{T}\backslash SU_q(2)) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{T} \setminus SU_q(2)) \otimes L^\infty(SU_q(2))$ とし，今回はこの α の性質を調べることを目標とします．

まず $L^\infty(SU_q(2))$ が $L^\infty(\mathbb{T}) \otimes B(\ell_2)$ であることを見ましょう．$L^\infty(\mathbb{T}) \otimes B(\ell_2)$ の元 x', v', u', y' を次のようにおきます．

$$x' = z \otimes \sum_{k\geq 0} \sqrt{1-q^{2k+2}} e_{k+1,k}, \quad u' = z \otimes \sum_{k\geq 0} -q^k e_{k,k}$$

$$v' = \overline{z} \otimes \sum_{k\geq 0} q^{k+1} e_{k,k}, \quad y' = \overline{z} \otimes \sum_{k\geq 0} \sqrt{1-q^{2k+2}} e_{k,k+1}.$$

すると，これらが $C(SU_q(2))$ の関係式をみたすことから $C(SU_q(2))$ から $*$-準同型がきます．Haar 状態にあたる状態は，$h = h_{\mathbb{T}} \otimes \mathrm{Tr}_\rho$, $\rho = \sum_{k\geq 0}(1-q^2)q^{2k} e_{k,k}$ で与えられます．ここで $h_{\mathbb{T}}$ は $C(\mathbb{T})$ の Haar 状態です．Haar 状態の忠実性は，先の $*$-準同型が単射であることを導きます．x' たちは $L^\infty(\mathbb{T}) \otimes B(\ell_2)$ を生成しますから，同型 $L^\infty(SU_q(2)) \cong L^\infty(\mathbb{T}) \otimes B(\ell_2)$ を手に入れました．さらに，この同型は $\mathbb{T}$ による左作用を $L^\infty(\mathbb{T})$ 上の回転作用に移し替えます．これにより次が分かります．

Lemma 1.1. $L^\infty(\mathbb{T} \setminus SU_q(2)) \cong B(\ell_2)$.

$L^\infty(\mathbb{T}\backslash SU_q(2))$ の生成元として，$\xi_{-1} = \sqrt{1+q^2}xv, \xi_0 = 1+(q^{-1}+q)uv, \xi_1 = \sqrt{1+q^2}uy$ がとれます．これを $B(\ell_2)$ で成分表示してみると，次が得られます．

$$\xi_{-1} = \sum_{r=0}^{\infty} a_r e_{r+1,r}, \quad \xi_0 = \sum_{r=0}^{\infty} (b_r+1) e_{r,r},$$

$$\xi_1 = \sum_{r=0}^{\infty} -q^{-1} a_r e_{r,r+1},$$

ここで，a_r と b_r は次で与えられます．

$$a_r = \sqrt{(1+q^2)} q^{r+1} \sqrt{1-q^{2r+2}}, \quad b_r = -(1+q^2)q^{2r}.$$

2. $L^\infty(\mathbb{T} \setminus SU_q(2))$ の作用込みの行列環近似について

さて，群が $B(\ell_2)$ に作用するときには，ユニタリで挟んだ形でかけます．今回もこのような形で書くために，行列環で $B(\ell_2)$ を近似してみます．重要な点は，環を作用込みで近似していくということです．$SU_q(2)$ の既約表現は，$1/2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ でパラメトライズされ，各 $\nu \in 1/2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，$2\nu+1$ 次元の表現空間 H_ν が対応しています．この既約表現を $V_\nu \in B(H_\nu) \otimes C(SU_q(2))$ とかきましょう．すると $SU_q(2)$ は行列環 $B(H_\nu)$ に $\mathrm{Ad}\, V_\nu$ で作用しています．今，埋め込み $H_\nu \subset \ell_2$ を H_ν の最低ウェイトベクトルを 0 番目において，順々に 2ν までおくことで定めます．すると，これに添った非単位的埋め込み $B(H_\nu) \subset B(\ell_2)$ を手に入れます．もともとユニタリであった V_ν は，今は等距離作用素です．このとき，次がなりたちます．

Proposition 2.1. 任意の $x \in B(\ell_2)$ に対して，$\alpha(x) = \text{s-lim}_{\nu\to\infty} V_\nu (x \otimes 1) V_\nu^*$.

この V_ν がユニタリに強収束していればうまい話ですが，実際にはそうなっていません．実際に，$[V_\nu]_{r,s}$ の項の中に $y^{(2\nu-r-s)}$ が入っています．これはだいたい片側シフトのアジョイントであり，とくに全部 0 に収束しています．そこで，この収束を食い止めるために，シフトを何個かかけることを考えます．S を片側シフトとしましょう．このとき，次の作用素を定義します (本当に強収束していることはそれほど明らかなことではないです)．

$$U_k = \text{s-lim}_{\nu\to\infty} V_\nu(1 \otimes S^{2\nu-k}),\ k \in \mathbb{Z}.$$

U_k は次のような性質をもつ作用素です．

Lemma 2.2. $\{U_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ は等距離作用素の族で，像空間は増大している，すなわち，$\ldots \subset \operatorname{ran} U_{-1} \subset \operatorname{ran} U_0 \subset \operatorname{ran} U_1 \subset \ldots$．さらに，$\text{s-lim}_{k\to-\infty} U_kU_k^* = 0$, $\text{s-lim}_{k\to\infty} \operatorname{ran} U_kU_k^* = 1$ がなりたつ．

射影 $e_k = U_kU_k^*$ を定め，作用素 w_k を次で与えます．

$$w_k = \begin{cases} (e_k - e_{k-1})U_k(1 \otimes S^{*(-2k-1)}), & k < 0, \\ (e_k - e_{k-1})U_k(1 \otimes S^{*2k}), & k \geq 0. \end{cases}$$

ここで，$2k$ や $2k+1$ が現れたのは，全単射 $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を一つ作る必要があったからです．全単射ができればこのようなものでなくてもかまいません．最終的に，$W = \sum_{k\in\mathbb{Z}} w_k$ と定めます．各 w_k の始空間と終空間が直行しているので，この和は強位相で収束します．W が求めたい一つの作用素です．

Proposition 2.3. $W \in B(\ell_2) \otimes L^\infty(SU_q(2))$ はユニタリで，任意の $x \in B(\ell_2)$ に対して $\alpha(x) = W(x \otimes 1)W^*$ を満たす．

このような W は $L^\infty(SU_q(2))$ のユニタリ分の抽出の自由度を持っています．すなわち，W' も上の関係式を満たせば，ユニタリ $u \in L^\infty(SU_q(2))$ が存在して，$W' = W(1 \otimes u)$ となります．

3. 2-コサイクル Ω

さて，α は作用なので，$(\alpha\otimes\mathrm{id})\circ\alpha = (\mathrm{id}\otimes\delta)\circ\alpha$ を満たすことから，$[W_{23}^*W_{12}^*(\mathrm{id}\otimes\delta)(W), x\otimes 1\otimes 1] = 0$ が任意の $x \in B(\ell_2)$ について成り立ちます．よって，次のようなユニタリ $\Omega \in L^\infty(SU_q(2)) \otimes L^\infty(SU_q(2))$ をとれます．

$$1 \otimes \Omega = W_{23}^*W_{12}^*(\mathrm{id}\otimes\delta)(W).$$

すると，Ω は次の 2-コサイクル関係式をみたします．

$$(\Omega \otimes 1)(\delta \otimes \mathrm{id})(\Omega) = (1 \otimes \Omega)(\mathrm{id}\otimes\delta)(\Omega).$$

$SU_q(2)$ の既約表現は有限次元であるという結果から，Ω は決してコバウンダリではありません．このコサイクルで余積をねじったものを δ_Ω と書きます．つまり $x \in L^\infty(SU_q(2))$ に対して，$\delta_\Omega(x) = \Omega\delta(x)\Omega^*$ とします．するとこれは $(\delta_\Omega \otimes \mathrm{id}) \circ \delta_\Omega = (\mathrm{id}\otimes\delta_\Omega) \circ \delta_\Omega$ を満たすので，新しい余積となります．これで，「量子半群」$(L^\infty(SU_q(2)), \delta_\Omega)$ が構成されました．しかしながら，まだあまり面白いことは分かっていません．

Problem 3.1. $(L^\infty(SU_q(2)), \delta_\Omega)$ の面白い性質を見つけよ．

この性質が，ある程度解明できると，次のような場面には効果的かもしれません．今，$SU_q(2)$ が von Neumann 環 N に作用 α を引き起こしていて，さらに $L^\infty(\mathbb{T}\setminus SU_q(2))$ と同型な部分環 Q を大域的に不変にしており，$L^\infty(\mathbb{T}\setminus SU_q(2))$ 上の作用と同じになっているとしましょう．Q が I 型因子環なので，$N = Q \otimes Q' \cap N$ と分解します．ここで，先ほどのユニタリ W を使って，$\beta\colon Q' \cap N \longrightarrow Q' \cap N \otimes L^\infty(SU_q(2))$ を $1 \otimes \beta(x) = W^*_{1,3}\alpha(1 \otimes x) \otimes 1 W_{1,3}$ と定めましょう．すると β は $(\beta \otimes \mathrm{id}) \circ \beta = (\mathrm{id} \otimes \delta_\Omega) \circ \beta$ を満たすので，相対可環子環 $Q' \cap N$ に量子半群 $(L^\infty(SU_q(2)), \delta_\Omega)$ の作用が得られたことになります．

References

[Po1] P. Podleś, *Quantum spheres*, Lett. Math. Phys. **14** (1987), no. 3, 193–202.

[Wo1] S. L. Woronowicz, *Twisted* SU(2) *group An example of a noncommutative differential calculus*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **23** (1987), no. 1, 117–181.